Scuole italiane all'estero • Americhe

PROBLEMA 1

Considerata la funzione $G:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$G(x) = \int_0^{2x} e^t \sin^2(t)\, dt,$$

svolgi le richieste che seguono.

1. Discuti campo di esistenza, continuità e derivabilità della funzione $G(x)$. Individua gli intervalli di positività/negatività e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.
2. Determina l'esistenza degli asintoti della funzione $G(x)$, motivando opportunamente la risposta.
3. Individua i punti stazionari della funzione $G(x)$, riconoscendone la tipologia, e i punti di flesso. Disegna quindi il grafico della funzione, motivando le scelte fatte.
4. Studia l'andamento dei coefficienti angolari delle rette tangenti alla funzione $G(x)$ nei suoi punti di flesso a tangente obliqua, determinando in particolare se tali rette formano un fascio di rette parallele.

PROBLEMA 1

1. Consideriamo la funzione integranda

   $g(x) = e^x \sin^2 x$,

   è definita e continua per ogni x reale.
   Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale

   $$H(x) = \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x (e^t \sin^2 t)\,dt$$

   è continua e derivabile con

   $H'(x) = g(x)$.

   La funzione data

   $$G(x) = \int_0^{2x} (e^t \sin^2 t)\,dt$$

   può essere allora vista come la composizione della funzione $h(x) = 2x$ con $H(x)$:

   $G(x) = H(2x) = H(h(x))$.

   Poiché $H(x)$ e $h(x)$ sono derivabili, anche $G(x)$ è derivabile (e definita e continua) in $\mathbb{R}$, con:

   $$G'(x) = H'(h(x)) \cdot h'(x) = g(h(x)) \cdot h'(x) = (e^{2x} \sin^2 2x) \cdot 2 = 2e^{2x} \sin^2 2x.$$

   Studiamo il segno e le intersezioni con gli assi di $G(x)$.

   Poiché la funzione integranda $g(x) = e^x \sin^2 x$ è sempre positiva e nulla solo nei punti $x = k\pi$, con k intero, la funzione $G(x)$ risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$. Infatti:

   per $x > 0$, $G(x) = \int_0^{2x} g(t)\,dt > 0$;

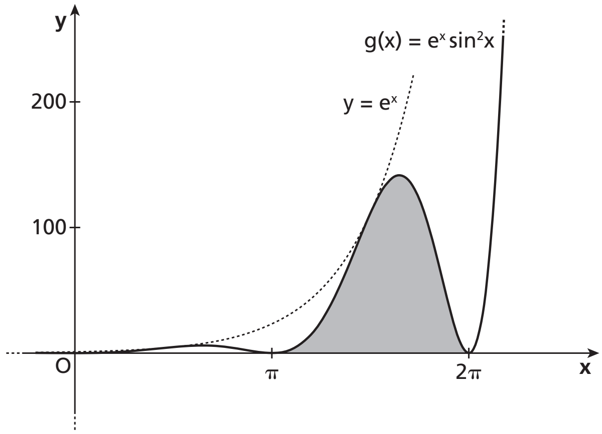
   per $x < 0$, $G(x) = \int_{2x}^{0} g(t)\,dt > 0 \ \rightarrow \ G(x) = -\int_{2x}^{0} g(t)\,dt < 0$.

   L'unico punto di intersezione del grafico di $G(x)$ con gli assi è allora l'origine del sistema di riferimento, in quanto $G(0) = 0$.

2. La funzione $G(x)$ è continua su $\mathbb{R}$, quindi non ha asintoti verticali.
   Stabiliamo se la funzione $G(x)$ ammette asintoti destro o sinistro.
   Per $x > 0$, la funzione integranda $g(x) = e^x \sin^2 x$ oscilla fra 0 e e^x, quindi l'area sottesa da $g(x)$ aumenta sempre più, in modo esponenziale, all'aumentare di x.

   In particolare, in ogni intervallo del tipo $[n\pi; (n+1)\pi]$ il grafico di $g(x)$ presenta un "pinnacolo" come illustrato in figura a pagina seguente, con $g(n\pi) = g((n+1)\pi) = 0$.

   Questi pinnacoli hanno la base di ampiezza π e l'altezza che segue l'andamento di $y = e^x$, quindi la loro area aumenta sempre più, in maniera esponenziale.



■ **Figura 2**

Nel calcolo di $G(x)$, all'aumentare di x, si vanno a sommare man mano le aree di questi pinnacoli, pertanto $G(x)$ ha un andamento esponenziale per $x > 0$ e non ammette asintoto per $x \to +\infty$.

Volendo formalizzare la situazione, cerchiamo un minorante per l'area del pinnacolo, facile da calcolare. Osserviamo che in ogni intervallo $[n\pi; (n+1)\pi]$ è sicuramente:

$$e^x \sin^2 x \geq e^{n\pi} \sin^2 x,$$

quindi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^x \sin^2 x)\,dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^{n\pi} \sin^2 x)\,dx = e^{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\,dx.$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos x \cdot \cos x\,dx = -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \;\to$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\cos x \cdot \sin x + \int 1\,dx \;\to\; \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(-\cos x \cdot \sin x + x + c).$$

L'integrale indefinito risulta allora:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}(-\cos x \cdot \sin x + x)\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} =$$

$$\left[\frac{1}{2}(-\cos(n+1)\pi \cdot \sin(n+1)\pi + (n+1)\pi)\right] - \left[\frac{1}{2}(-\cos n\pi \cdot \sin n\pi + n\pi)\right] =$$

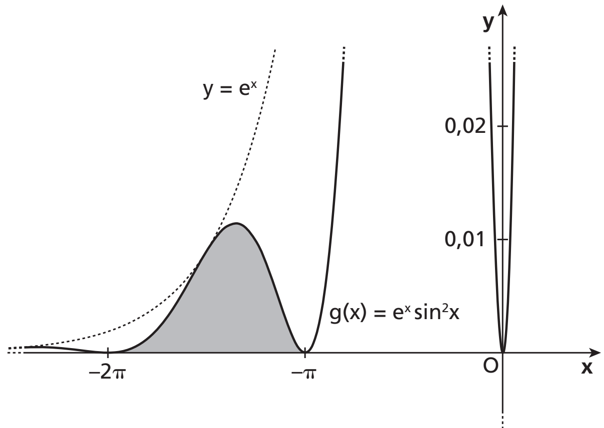
$$\left[\frac{1}{2}(n+1)\pi\right] - \left[\frac{1}{2} n\pi\right] = \frac{\pi}{2}$$

ottenendo infine la minorazione:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (e^x \sin^2 x)\,dx \geq e^{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{n\pi}.$$

L'area del pinnacolo relativo all'intervallo $[n\pi; (n+1)\pi]$ è dunque maggiore di $\frac{\pi}{2} \cdot e^{n\pi}$, e quindi ha un andamento di tipo esponenziale man mano che gli intervalli considerati si spostano verso destra.
La funzione $G(x)$, che rappresenta l'area dei pinnacoli compresi nell'intervallo $[0; 2x]$, ha pertanto andamento esponenziale e non ammette asintoto obliquo (né, ovviamente, orizzontale).

Per $x < 0$ potremmo procedere in maniera simile, valutando l'area dei pinnacoli e mostrare che queste aree tendono a 0 per $x \to -\infty$, sempre con andamento esponenziale, in modo tale che il loro contributo nel calcolo di $G(x)$ è così ridotto da portare a un asintoto orizzontale.



■ **Figura 3**

Possiamo procedere però più rapidamente, osservando che

$$g(x) = e^x \sin^2 x \leq e^x,$$

quindi l'area sottesa al grafico di $g(x)$ in $]-\infty; 0]$ è sicuramente positiva e inferiore dell'area A sottesa a $y = e^x$:

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 e^x dx = \lim_{t \to -\infty} [e^x]_t^0 = \lim_{t \to -\infty} (e^0 - e^t) = 1.$$

Quindi, l'area sottesa dal grafico di $g(x)$ in $]-\infty; 0]$ è un valore a compreso fra 0 e 1.

Otteniamo allora:

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_0^{2x} g(x)dx = \lim_{x \to -\infty} - \int_{2x}^{0} g(x)dx = -\left(\lim_{x \to -\infty} \int_{2x}^{0} g(x)dx \right) = -a,$$

dove abbiamo scambiato gli estremi di integrazione e cambiato il segno all'integrale, perché $x < 0$.

La funzione $G(x)$ presenta dunque un asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = -a$, con $-1 < -a < 0$.

3. Cerchiamo i punti stazionari di $G(x)$ studiando gli zeri e il segno della derivata prima.
La derivata prima $G'(x) = 2e^{2x} \sin^2 2x$ è sempre positiva, tranne nei punti dove si annulla:

$$G'(x) = 0 \quad \to \quad 2e^{2x} \sin^2 2x = 0 \quad \to \quad \sin 2x = 0 \quad \to \quad 2x = k\pi \quad \to \quad x = k\frac{\pi}{2},$$

con k intero.

La funzione $G(x)$ è quindi crescente in $\mathbb{R}$ e presenta in $x = k\frac{\pi}{2}$ punti di flesso a tangente orizzontale.

Per i flessi, calcoliamo la derivata seconda:

$$G''(x) = D[2e^{2x} \sin^2 2x] = 2 \cdot 2e^{2x} \sin^2 2x + 2e^{2x} \cdot 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 = 4e^{2x} \sin 2x (\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x).$$

Determiniamo gli zeri della derivata seconda:

$$G''(x) = 0 \quad \to \quad \sin 2x = 0 \ \vee \ \sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 0.$$

Dal primo termine ricaviamo:

$$\sin 2x = 0 \quad \to \quad x = k\frac{\pi}{2};$$

il secondo termine porta a:

$$\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -2 \quad \rightarrow \quad \tan 2x = -2 \quad \rightarrow$$

$$2x = \arctan(-2) + k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + k\frac{\pi}{2},$$

con $\alpha = \frac{1}{2}\arctan(-2) \simeq -0{,}55$, (abbiamo diviso entrambi i membri per $\cos 2x$ perché i punti che annullano $\cos 2x$ non sono soluzione dell'equazione).

Studiamo ora il segno di:

$$\sin 2x(\sin 2x + 2 \cdot \cos 2x) =$$
$$\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (\tan 2x + 2),$$

che coincide col segno di $G''(x)$.

Osservando il disegno a lato, dove sull'asse delle ascisse abbiamo riportato il valore dell'argomento $2x$, possiamo dedurre il segno in ogni intervallo; otteniamo:

$$\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot (\tan 2x + 2) \geq 0 \text{ per}$$

$$0 + k\pi \leq 2x \leq 2\alpha + \pi + k\pi \rightarrow$$

$$k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \alpha + \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}.$$

La derivata seconda $G''(x)$ è dunque positiva, e $G(x)$ volge la concavità verso l'alto, per

$$k\frac{\pi}{2} < x < \alpha + \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2};$$

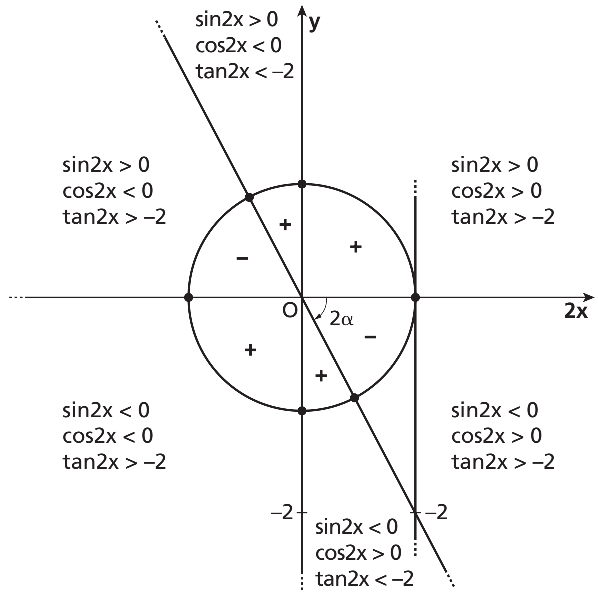


Figura 4

negli altri intervalli $G''(x)$ è negativa o nulla e $G(x)$ volge la concavità verso il basso.
I punti di flesso hanno coordinate:

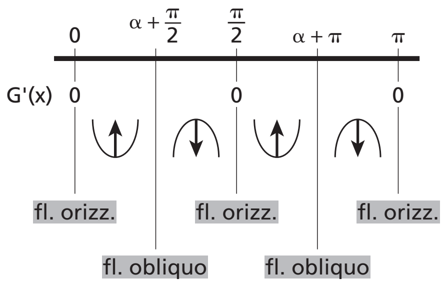
$$2x = k\pi \ \vee \ 2x = 2\alpha + k\pi \quad \rightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \ \vee \ x = \alpha + k\frac{\pi}{2};$$

in particolare $x = k\frac{\pi}{2}$ sono punti di flesso a tangente orizzontale, $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua.

Riassumendo, la funzione $G(x)$:

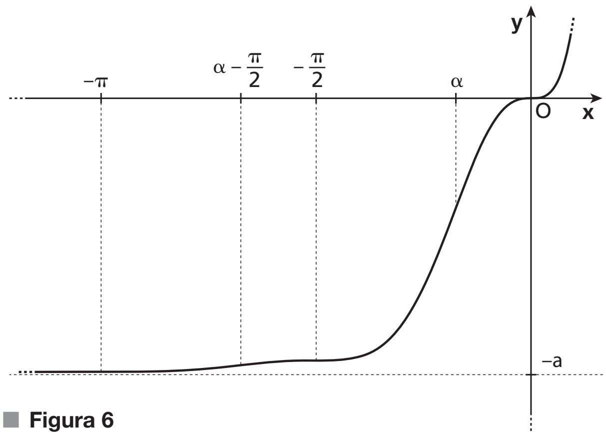
- è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$, si annulla in $x = 0$;
- ha asintoto orizzontale sinistro $y = -a$, con $-1 < -a < 0$;
- ha punti di flesso a tangente orizzontale in $x = k\frac{\pi}{2}$;
- ha punti di flesso a tangente obliqua in $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$;
- volge la concavità verso l'alto in $k\frac{\pi}{2} < x < \alpha + \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$, verso il basso altrove.

Per individuare i punti caratteristici del grafico, ricordiamo che $\alpha \simeq -0{,}55$, $\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$ e $\pi \simeq 3{,}14$, quindi nell'intervallo $[0; \pi]$ la situazione dei flessi e dei punti stazionari è schematizzata nel seguente disegno (i punti si susseguono poi con periodicità π).

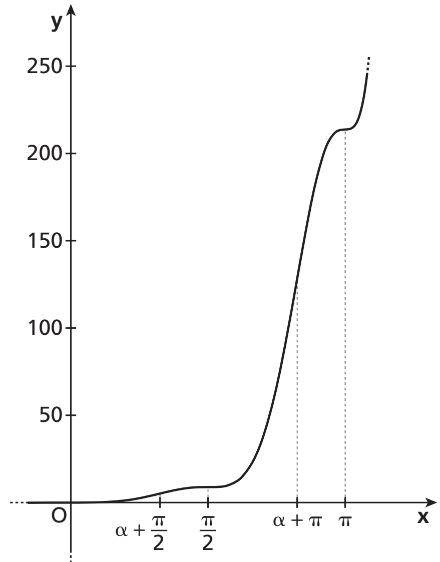


■ **Figura 5**

Siamo ora in grado di disegnare un grafico approssimato della funzione.
Considerati i valori in gioco (che aumentano esponenzialmente per $x > 0$, mentre tendono rapidamente all'asintoto orizzontale per $x < 0$), disegniamo due grafici separati per $G(x)$.



■ **Figura 6**



■ **Figura 7**

4. I punti di flesso a tangente obliqua hanno coordinate $x = \alpha + k\frac{\pi}{2}$, con $\alpha \simeq -0,55$ e k intero.

Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $G(x)$, in tali punti, vale:

$$G'\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{2\cdot\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)}\sin^2\left[2\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2e^{2\alpha + k\pi}\sin^2(2\alpha + k\pi) = 2e^{2\alpha + k\pi}\sin^2 2\alpha,$$

quindi i coefficienti angolari differiscono uno dall'altro, per la presenza del fattore $e^{2\alpha + k\pi}$ che varia al variare di k.
Le rette tangenti al grafico nei punti di flesso obliquo *non* formano un fascio di rette parallele.